7 класс

Задача 7.1. Петя едет в гости

Ответ: 2,5 км.

Решение: Так как Петя и дедушка идут навстречу друг другу, перерисуем графики так, чтобы на вертикальной оси было отложено расстояние S_A от станции Аистово до соответствующего человека (см. рис. 7.1). Графики пересекаются в одной точке, соответствующей расстоянию 2,5 км.

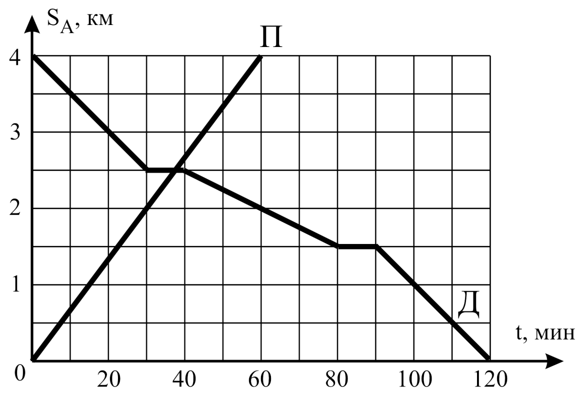

Рис. 7.1.

Задача 7.2. Новый велосипед

Ответ: 19 км/ч.

Решение: Пусть s_1, s_2 и s_3 — длина первого, второго и третьего участка пути Леопольда. Из условия следует, что $s_1 = s/5$, $s_2 = s_3 = 2s/5$, где s — весь путь. Находим всё время, затраченное Леопольдом на дорогу ($\upsilon_1 = 5$ м/с $= 18$ км/ч, $\upsilon_2 = 16$ км/ч, $\upsilon_3 = 400$ м/мин $= 24$ км/ч — скорости на соответствующих участках):

$$t = \frac{s_1}{\upsilon_1} + \frac{s_2}{\upsilon_2} + \frac{s_3}{\upsilon_3} = \frac{s}{5\upsilon_1} + \frac{2s}{5\upsilon_2} + \frac{2s}{5\upsilon_3}.$$

Отсюда получаем, что средняя скорость движения кота Леопольда равна

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{1}{\frac{1}{5\upsilon_1} + \frac{2}{5\upsilon_2} + \frac{2}{5\upsilon_3}} = \frac{360}{19}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \approx 19 \text{ км/ч}.$$

Задача 7.3. Калибр пули

Ответ: $d_{12K} = 1{,}9$ см; $d_{16K} = 1{,}7$ см.

Решение: Найдём массу пуль 12-го и 16-го калибра:

$$m_{12K} = \frac{453{,}6\ \text{г}}{12} = 37{,}8\ \text{г}, \quad m_{16K} = \frac{453{,}6\ \text{г}}{16} = 28{,}35\ \text{г}.$$

Объём пули равен отношению соответствующей массы и плотности свинца. С другой стороны, объём может быть рассчитан как $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{\pi d^3}{6}$. Приравнивая оба выражения друг другу, получаем, что

$$\frac{m}{\rho} = \frac{\pi d^3}{6} \quad \Rightarrow \quad d^3 = \frac{6m}{\pi\rho}.$$

Подстановка числовых значений даёт

$$d_{12K}^3 = \frac{6m_{12K}}{\pi\rho} \approx 6{,}4\ \text{см}^3, \quad d_{16K}^3 = \frac{6m_{16K}}{\pi\rho} \approx 4{,}8\ \text{см}^3.$$

Теперь находим диаметр пули (например, подбором):

$$d_{12K} \approx 1{,}9\ \text{см}, \quad d_{16K} \approx 1{,}7\ \text{см}.$$

Задача 7.4. Объём грузика

Ответ: 30 мл.

Решение: На левом рисунке (см. рис. 7.2) цилиндр погружен на одну треть своего объёма, на правом — на две трети. При этом уровень жидкости повышается с отметки 50 мл до 60 мл. Следовательно, дополнительная треть объёма цилиндра составляет 10 мл. Отсюда получаем, что объём всего цилиндра равен 30 мл.

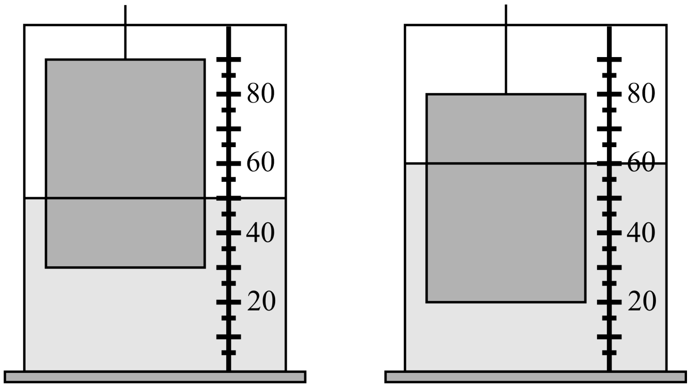

Рис. 7.2.

8 класс

Задача 8.1. Таракан в часах

Ответ: По нижней траектории (см. рис. 8.1); 11,4 с.

Решение: Так как Вася может сделать один круг по зубцам покоящейся шестерёнки радиуса R за 4 с, его линейная скорость относительно покоящейся шестерёнки равна $\upsilon_В = 2\pi R n_1$, где $n_1 = \frac{1\text{ об}}{4\text{ с}} = 0{,}25$ об/с. Линейная скорость вращения левой шестерёнки равна $\upsilon_Ш = 2\pi R n_2$, где $n_2 = \frac{10\text{ об}}{1\text{ мин}} = 1/6$ об/с. По условию, шестерёнки крутятся, не проскальзывая, поэтому линейная скорость вращения оставшихся шестерёнок будет также равна $\upsilon_Ш$.

Если таракан бежит по верхней траектории (рис. 8.1), время его движения равно

$$t_{\text{верх}} = \frac{\pi R}{\upsilon_В + \upsilon_Ш} + \frac{2\pi R}{\upsilon_В - \upsilon_Ш} + \frac{\pi R/2}{\upsilon_В + \upsilon_Ш} =$$

$$= \frac{1/2}{n_1 + n_2} + \frac{1}{n_1 - n_2} + \frac{1/4}{n_1 + n_2} = 13{,}8 \text{ с}.$$

Когда же таракан Вася бежит по нижней траектории, время его движения равно

$$t_{\text{нижн}} = \frac{\pi R}{\upsilon_В - \upsilon_Ш} + \frac{2\pi R}{\upsilon_В + \upsilon_Ш} + \frac{\pi R/2}{\upsilon_В - \upsilon_Ш} =$$

$$= \frac{1/2}{n_1 - n_2} + \frac{1}{n_1 + n_2} + \frac{1/4}{n_1 - n_2} = 11{,}4 \text{ с}.$$

Очевидно, что Вася пробежит из точки A в точку B за наименьшее время, если будет двигаться по нижней траектории, и это время равно 11,4 с.

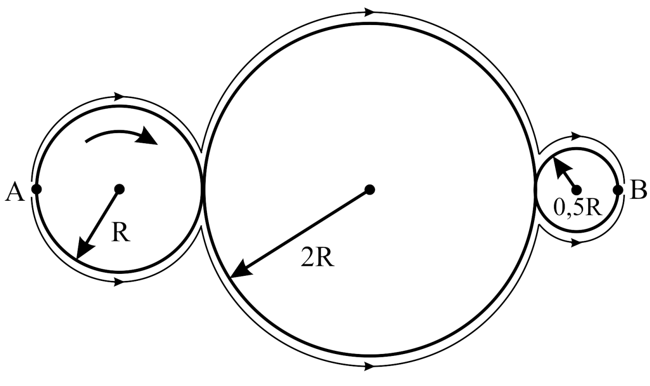

Рис. 8.1.

Задача 8.2. Интересная находка

Ответ: $\rho_1 = 1620$ кг/м^3, $\rho_2 = 8100$ кг/м^3.

Решение: Пусть масса медальона равна m, а $\rho = 2700$ кг/м^3 — измеренная Петей плотность. Тогда объём медальона равен $V = \frac{m}{\rho}$. С другой стороны, его объём равен сумме объёмов составных частей (ρ_1 и $\rho_2 = 5\rho_1$ — их плотности):

$$V = \frac{m/2}{\rho_1} + \frac{m/2}{\rho_2} = \frac{m/2}{\rho_1} + \frac{m/2}{5\rho_1} = \frac{3m}{5\rho_1}.$$

Приравнивая полученные выражение, находим, что $\rho_1 = 0{,}6\rho = 1620$ кг/м^3. Следовательно, $\rho_2 = 5\rho_1 = 8100$ кг/м^3.

Задача 8.3. Испытание морозильной камеры

Ответ: 231 мин.

Решение: Из графика (рис. 8.2) видно, что вода за 25 мин охладилась с 50 ℃ до 35 ℃. Следовательно мощность тепловых потерь равна $N = c_В m \cdot 15\,℃/25$ мин, где $c_В$ — удельная теплоёмкость воды, m — её масса.

Найдём теперь количество теплоты, которое необходимо отвести, чтобы вода замёрзла и получившийся лёд охладился до температуры -20 ℃ ($c_Л$ — удельная теплоёмкость льда, λ — удельная теплота плавления льда):

$$Q = c_В m(50\,℃ - 0\,℃) + \lambda m + c_Л m(0\,℃ - (-20\,℃)).$$

Отсюда получаем, что время, прошедшее с начала эксперимента, равно

$$t = \frac{Q}{N} = \frac{(c_В \cdot 50\,℃ + \lambda + c_Л \cdot 20\,℃) \cdot 25\text{ мин}}{c_В \cdot 15\,℃} \approx 231\text{ мин}.$$

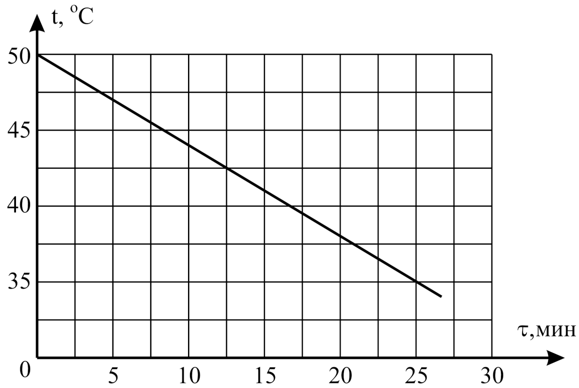

Рис. 8.2.

Задача 8.4. Неравноплечие весы

Ответ: 450 г.

Решение: Пусть x — длина одного деления на рычаге, m — масса грузика, а M — масса рычага. Центр тяжести рычага находится на расстоянии x от точки подвеса. Запишем условия равновесия рычага в обоих случаях:

$$\text{(Грузик слева)} \qquad mg5x + Mgx = m_1 g3x,$$

$$\text{(Грузик справа)} \qquad m_2 g5x + Mgx = mg3x.$$

Вычитаем эти равенства друг из друга

$$(m - m_2)g5x = (m_1 - m)g3x \quad \Rightarrow \quad 5(m - m_2) = 3(m_1 - m).$$

Выражаем отсюда массу грузика

$$m = \frac{3m_1 + 5m_2}{8} = 450\text{ г}.$$

9 класс

Задача 9.1. Трудолюбивый дятел

Ответ: $a_1 = 166$ м/с^2, $a_2 = 8300$ м/с^2.

Решение: Пусть a_1 — ускорение, с которым голова дятла движется при замахе, a_2 — ускорение головы во время контакта клюва с деревом, υ — скорость при ударе о дерево. Времена разгона t_1 и торможения t_2 головы связаны с остальными величинами следующим образом:

$$\upsilon = a_1 t_1, \qquad L = \frac{a_1 t_1^2}{2},$$

$$\upsilon = a_2 t_2, \qquad h = \upsilon t_2 - \frac{a_2 t_2^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2}.$$

Отсюда

$$a_1 t_1 = a_2 t_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$\frac{L}{h} = \frac{a_1 t_1^2}{a_2 t_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{h} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Так как $L/h = 50$, получаем, что $a_2 = 50a_1$, $t_1 = 50t_2$. С другой стороны, сумма t_1 и t_2 даёт половину времени между ударами дятла (столько же времени тратится на возврат головы в исходное положение)

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{2n} = \frac{1}{40}\text{ с} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{1}{51 \cdot 40}\text{ с} \approx 0{,}5\text{ мс}.$$

Находим теперь ускорения:

$$a_2 = \frac{2h}{t_2^2} \approx 8300\text{ м/с}^2, \quad a_1 = \frac{a_2}{50} = 166\text{ м/с}^2.$$

Задача 9.2. Эксперимент с калориметром

Ответ: 31,5 ℃.

Решение: Пусть $m_Д = 120$ г — масса алюминиевой детали. Объём детали равен $V_Д = m_Д/\rho_А \approx 44$ см^3. При погружении детали в сосуд часть воды вылилась. Объём оставшейся воды равен $V_В = 200\text{ см}^3 - 44\text{ см}^3 = 156\text{ см}^3$, а масса, соответственно, $m_В = 156$ г.

Составим уравнение теплового баланса (t — установившаяся температура):

$$c_В m_В (t - t_В) = c_А m_Д (t_Д - t) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{c_В m_В t_В + c_А m_Д t_Д}{c_В m_В + c_А m_Д} \approx 31{,}5\,℃.$$

Задача 9.3. Гидравлический подъёмник

Ответ: 2,1 см.

Решение: Пусть груз поднялся относительно своего первоначального положения на высоту x. Тогда поршень в левом колене опустился на $20x$, и разность уровней масла в левом и правом колене составляет $21x$. Запишем условие равенства давления в обоих коленах (на уровне левого поршня)

$$\frac{F}{S/20} = \frac{mg}{S} + \rho_М g \cdot 21x.$$

Отсюда

$$x = \frac{20F - mg}{21\rho_М g S} \approx 2{,}1\text{ см}.$$

Задача 9.4. Показания амперметра

Ответ: 1,7 А.

Решение: Если ключ К замкнут, то цепь эквивалентна двум парам параллельно соединённых резисторов. Общее сопротивление такой цепи равно

$$R_1 = \frac{R}{2} + \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} = \frac{17R}{10}.$$

Сила тока, идущего от источника, равна $I = \frac{U}{R_1} = \frac{10U}{17R}$. Соответственно, сила тока, текущего через резистор с сопротивлением R, равна $\frac{I}{2} = \frac{5U}{17R}$, а напряжение на нём — $5U/17$. Напряжение на резисторе с сопротивлением 2R составляет $12U/17$, следовательно, сила тока через него равна $\frac{6U}{17R}$. Отсюда получаем, что ток, текущий через амперметр, даётся формулой

$$I_1 = \frac{6U}{17R} - \frac{5U}{17R} = \frac{U}{17R}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда ключ К разомкнут. Общее сопротивление такой цепи равно

$$R_2 = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5R}{2}.$$

Во втором случае амперметр показывает значение силы тока, текущего через нижний резистор с сопротивлением R. Она равна половине силы тока, идущего от источника

$$I_2 = \frac{U}{2R_2} = \frac{U}{5R}.$$

Из полученных выражений для I_1 и I_2 получаем, что

$$I_2 = \frac{17}{5} I_1 = 1{,}7 \text{ А}.$$

Задача 9.5. Отражения в зеркалах
Ответ: см рис. 9.1.
Решение: Построим изображения стрелки, сформированное лучами, испытавшими однократное отражение от какого-либо зеркала. Получим изображения A_1B_1 и A_2B_2. Помимо этого, существует изображение, создаваемое лучами, испытавшими двукратное отражение — сначала от наклонного зеркала, затем от горизонтального. Чтобы построить его, найдём отражение части изображения A_1B_1, находящейся над линией, проходящей через горизонтальное зеркало (т.е. отрезка CA_1, где C — середина A_1B_1). Получим изображение CA_3.

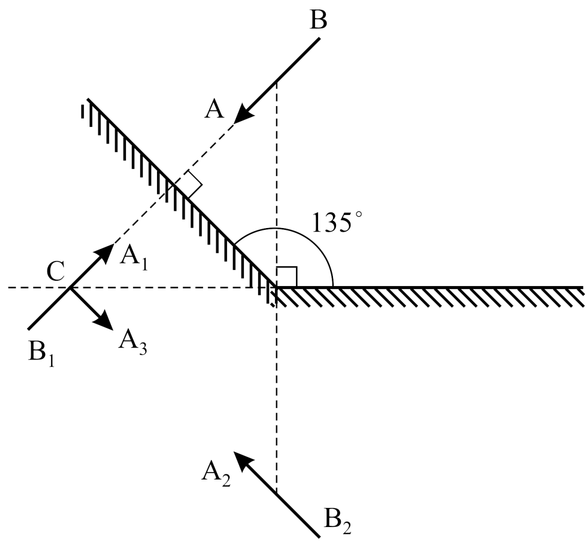

Рис. 9.1.

10 класс

Задача 10.1. Строение Луны

Ответ: На поверхности внутреннего ядра меньше на 0,09 м/с^2.

Решение: Так как для небесных тел сферически симметричной формы справедлив закон всемирного тяготения, ускорение свободного падения на внешней поверхности Луны определяется формулой $g_{\text{внеш}} = \dfrac{GM}{R^2}$, где M — масса Луны, G — гравитационная постоянная.

Когда тело находится на поверхности внутреннего ядра, внешняя оболочка на него не действует, и ускорение свободного падения будет равно $g_{\text{внутр}} = \dfrac{G \cdot 0{,}8M}{r^2}$. Отсюда получаем, что

$$\frac{g_{\text{внутр}}}{g_{\text{внеш}}} = 0{,}8\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad g_{\text{внутр}} = 0{,}8\left(\frac{R}{r}\right)^2 g_{\text{внеш}} \approx 1{,}53 \text{ м/с}^2.$$

Разность между значениями ускорений составляет $g_{\text{внеш}} - g_{\text{внутр}} = 0{,}09$ м/с^2.

Задача 10.2. Вверх по плоскости

Ответ: $\mu = \sqrt{3}/5 \approx 0{,}35$.

Решение: В начальный момент тело обладало кинетической энергией $m\upsilon^2/2$, где m — масса тела, а при возвращении обратно — $m\upsilon^2/8$. В точке наивысшего подъёма потенциальная энергия тела составляла $mgL\sin\alpha$, где L — расстояние, пройденное телом по плоскости. Изменение энергии тела в процессе движения равно работе силы трения (N — сила реакции опоры):

$$\text{(Движение вверх)} \qquad mgL\sin\alpha - \frac{m\upsilon^2}{2} = -\mu NL = -\mu mgL\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = 2gL(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

$$\text{(Движение вниз)} \qquad \frac{m\upsilon^2}{8} - mgL\sin\alpha = -\mu NL = -\mu mgL\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = 8gL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Отсюда получаем, что

$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 4(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{3}{5}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}35.$$

Задача 10.3. Флюгер на корабле

Ответ: $\overrightarrow{AD}$ (см. рис. 10.1).

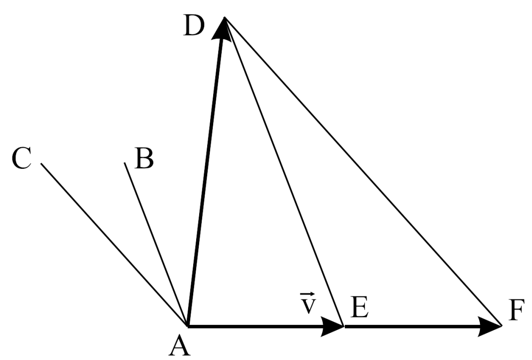

Рис. 10.1.

Решение: Скорость ветра относительно Земли $\vec{u}_B$, скорость ветра относительно корабля $\vec{u}'_B$ и скорость корабля $\vec{\upsilon}_K$ связаны соотношением $\vec{u}'_B = \vec{u}_B - \vec{\upsilon}_K$. Подставляя сюда условие задачи, получаем два векторных равенства:

$$\vec{u}'_{B1} = \vec{u}_B - \vec{\upsilon}\,, \qquad \vec{u}'_{B2} = \vec{u}_B - 2\vec{\upsilon}\,,$$

где векторы $\vec{u}'_{B1}$ и $\vec{u}'_{B2}$ ориентированы по лучам AB и AC соответственно. Вычитаем одно равенство из другого и приходим к следующему соотношению:

$$\vec{u}'_{B1} - \vec{u}'_{B2} = \vec{\upsilon}\,.$$

Длины векторов $\vec{u}'_{B1}$ и $\vec{u}'_{B2}$ неизвестны. Чтобы их найти, сделаем построение, изображённое на рис. 10.1. Здесь вектор $\vec{EF} = \vec{AE} = \vec{\upsilon}$, прямая DE параллельна прямой AB, прямая DF параллельна прямой AC, а D — точка их пересечения. Очевидно, что $\vec{ED} - \vec{FD} = \vec{ED} = \vec{\upsilon}$. Отсюда получаем, что $\vec{ED} = \vec{u}'_{B1}$, а $\vec{FD} = \vec{u}'_{B2}$. Теперь находим вектор скорости ветра относительно Земли $\vec{u}_B$:

$$\vec{u}_B = \vec{u}'_{B1} + \vec{\upsilon} = \vec{ED} + \vec{AE} = \vec{AD}.$$

Задача 10.4. Гремучая смесь
Ответ: 100 кПа.
Решение: При сгорании водорода происходит химическая реакция

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O.$$

Следовательно, в цилиндре вместо 3 молей газа окажется 2 моля водяных паров. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$ следует, что при уменьшении числа молей в 1,5 раза и неизменных температуре и объёме давление газа также уменьшится в 1,5 раза и станет равным 100 кПа. Данное рассуждение является корректным, так как при температуре 200 ℃ и при давлении 100 кПа конденсации водяных паров не происходит.

Задача 10.5. Машинка и санки
Ответ: 8,4 см.
Решение: Машинка едет вперёд по поверхности санок под действием силы трения $F_{тр1}$, возникающей между поверхностью и колёсами. Запишем 2-й закон Ньютона: $ma = F_{тр1}$. По 3-му закону Ньютона такая же по величине сила толкает санки назад. Сравним её с максимальным значением силы трения покоя $F_{тр2}$, действующей между полозьями санок и льдом:

$$F_{тр2} = \mu(m+M)g = 0{,}43\ \text{Н}, \quad F_{тр1} = ma = 0{,}4\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad F_{тр1} < F_{тр2}.$$

Отсюда видно, что санки во время движения машинки по их поверхности не двигаются.
Найдём скорость машинки перед ударом о передний бортик $\upsilon = \sqrt{2aL}$. После неупругого удара санки с машинкой движутся с одинаковой скоростью u. Запишем закон сохранения импульса и найдём эту скорость:

$$m\upsilon = (m+M)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m\upsilon}{m+M} = \frac{m\sqrt{2aL}}{m+M}.$$

Вычислим теперь величину ускорения $a_{торм}$ и тормозной путь s, пройденный санками:

$$(m+M)a_{торм} = F_{тр2} = \mu(m+M)g \quad \Rightarrow \quad a_{торм} = \mu g,$$

$$s = \frac{u^2}{2a_{торм}} = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{aL}{\mu g} \approx 8{,}4\ \text{см}.$$

11 класс

Задача 11.1. Полая планета

Ответ: $g_N = 23g/32$, $g_S = 119g/128$.

Решение: Так как планета X1 однородна, ускорение свободного падения на её поверхности равно $g = GM/R^2$, где G — гравитационная постоянная, M — масса планеты.

Чтобы рассчитать ускорение свободного падения на поверхности планеты X2, будем формально считать, что эта планета состоит из двух, наложенных друг на друга, однородных шаров. Первый из них имеет радиус R и идентичен планете X1, второй располагается на месте полости и имеет, по сравнению с X1, одинаковую по величине, но противоположную по знаку плотность «вещества». Масса второй составляющей равна $M_2 = -Mr^3/R^3$.

Найдём силу притяжения планеты X2, действующую на тело массы m, находящееся в точках N и S

$$F_N = \frac{GmM}{R^2} + \frac{GmM_2}{(R-x)^2} = \frac{GmM}{R^2}\left(1 - \frac{r^3}{R(R-x)^2}\right),$$

$$F_S = \frac{GmM}{R^2} + \frac{GmM_2}{(R+x)^2} = \frac{GmM}{R^2}\left(1 - \frac{r^3}{R(R+x)^2}\right).$$

Ускорение свободного падения в этих точках равны

$$g_N = \frac{F_N}{m} = \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{r^3}{R(R-x)^2}\right) = g\left(1 - \frac{r^3}{R(R-x)^2}\right),$$

$$g_S = \frac{F_S}{m} = g\left(1 - \frac{r^3}{R(R+x)^2}\right).$$

Подставляем значения $x = R/3$ и $r = R/2$:

$$g_N = \frac{23g}{32}, \qquad g_N = \frac{119g}{128}.$$

Задача 11.2. Шершавый брусок

Ответ: $\mu \geqslant 2\upsilon^2/(gL)$.

Решение: Пусть x — длина заехавшей на шероховатую поверхность части бруска. Сила трения, действующая на неё, равна $F_{тр} = \mu m(x)g$, где $m(x) = mx/(2L)$ — масса находящейся на шероховатой поверхности части бруска, m — масса всего бруска. Кинетическая энергия, которой обладал брусок, тратится на работу против силы трения $m\upsilon^2/2 = A_{тр}$. Так как сила трения зависит от пройденного бруском пути x по линейному закону,

$$A_{тр} = (F_{тр})_{сред}x = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\mu mgx}{2L}\right)x = \frac{\mu mgx^2}{4L}.$$

Подставляя найденное выражение, получаем

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{\mu mgx^2}{4L} \quad\Rightarrow\quad x^2 = \frac{2\upsilon^2 L}{\mu g}.$$

По условию, $x \leqslant L$. Следовательно,

$$x^2 = \frac{2\upsilon^2 L}{\mu g} \leqslant L^2 \quad\Rightarrow\quad \mu \geqslant \frac{2\upsilon^2}{gL}.$$

Задача 11.3. Надуваем шарик

Ответ: $m_Г = 160$ г, $Q = 243{,}2$ кДж.

Решение: Сосуд с наполненной оболочкой поднимется в воздух, если сила Архимеда, действующая на него, превысит силу тяжести

$$F_А > F_Т \quad \Rightarrow \quad \rho_В g V > (m + m_Г)g.$$

Здесь $\rho_В$ — плотность воздуха, V — объём получившегося шарика. Чтобы найти эти величины, запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для гелия и воздуха ($p_А$ — атмосферное давление, $m_В$ и $V_В$ — масса и объём воздуха)

$$p_А V_В = \frac{m_В}{M_В}RT \quad \Rightarrow \quad \rho_В = \frac{p_А M_В}{RT},$$

$$p_А V = \frac{m_Г}{M_Г}RT \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_Г RT}{p_А M_Г}.$$

Подставляем полученные выражения и получаем

$$\rho_В g V > (m + m_Г)g \quad \Rightarrow \quad \frac{M_В}{M_Г}m_Г > m + m_Г \quad \Rightarrow \quad m_Г > \frac{M_Г m}{M_В - M_Г}.$$

Минимальное значение массы гелия равно

$$(m_Г)_{мин} = \frac{M_Г m}{M_В - M_Г} = 0{,}16 \text{ кг}.$$

Для того, чтобы жидкий гелий нагреть от температуры $T_0 = 4{,}2$ К до температуры $T = 293$ К, его нужно сначала перевести в газообразное состояние, а затем газ изобарически нагреть до температуры T. Для испарения жидкого гелия массой $m_Г$ потребуется теплота $Q_1 = Lm_Г$. Теплота, необходимая для изобарического нагрева одноатомного газа, может вычислена по формуле

$$Q_2 = \frac{5}{2}\frac{m_Г}{M_Г}R(T - T_0).$$

Отсюда получаем, что

$$Q = Q_1 + Q_2 = Lm_Г + \frac{5}{2}\frac{m_Г}{M_Г}R(T - T_0) \approx 243{,}2 \text{ кДж}.$$

Задача 11.4. Цепь с конденсатором

Ответ: $\dfrac{C(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)r_2}{r_1 + r_2}$.

Решение: При замкнутом ключе K ток течёт только через источники в направлении, указанном на рисунке 11.1. Сила тока равна $I = (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)/(r_1 + r_2)$. Напряжение на конденсаторе равно $U_C = \mathscr{E}_2 - Ir_2$.

При разомкнутом ключе в установившемся режиме ток отсутствует, и напряжение на конденсаторе равно $U'_C = \mathscr{E}_2$. Заряд, прошедший после размыкания ключа через источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$, равен

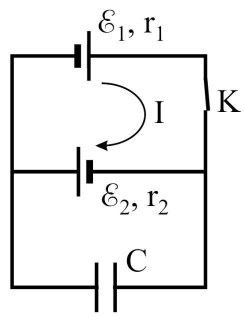

Рис. 11.1.

$$\Delta q = C(U'_C - U_C) = CIr_2 = \frac{C(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)r_2}{r_1 + r_2}.$$

Задача 11.5. Догонялки

Ответ: h/9.

Решение: Запишем законы сохранения импульса и энергии для системы «горка-грузик»:

$$0 = mu - 2m\upsilon, \quad mgh = \frac{mu^2}{2} + \frac{2m\upsilon^2}{2}.$$

Здесь u — скорость грузика при движении по столу, υ — скорость горки. Получим, что

$$\upsilon = \frac{u}{2}, \quad u^2 = \frac{4}{3}gh.$$

После удара груза о стенку его скорость меняет своё направление, и грузик начинает догонять горку.

Запишем ещё раз законы сохранения импульса и энергии для системы «горка-грузик», учитывая, что при подъёме грузика на максимальную высоту h', у него остаётся скорость u', направленная горизонтально и равная скорости горки:

$$mu + 2m\upsilon = (m + 2m)u', \quad \frac{mu^2}{2} + \frac{2m\upsilon^2}{2} = mgh' + \frac{(m + 2m)(u')^2}{2}.$$

Так как $\upsilon = u/2$, из первого условия получаем, что $u' = 2u/3$. Подставляем во второе условие, принимая во внимание, что его левая часть равна mgh:

$$mgh = mgh' + \frac{2}{3}mu^2 = mgh' + \frac{8}{9}mgh \quad \Rightarrow \quad h' = \frac{h}{9}.$$